数理解析研究所講究録
216巻 1974年 123-132

Differentiable Dynamical System の問題について

名大 教養 白岩 謙一

今年の4月東京で行なわれた多様体論国際会議で，S. Smale, C. Zeeman, D. Sullivan 等から聞いたことをもとにして，Differentiable Dynamical System の理論において，現在未解決の問題の中から重要と思はれるものを，いくつか取り出して解説することにする．勿論ここにあげるのは，私にとって興味のあるものが中心であって，一定の偏りをもっているが，この方面を研究しようとされる方や，この分野に興味をもっている方々の参考になれば幸いである．

§1 構造的安定性

MをC^∞多様体，$f: M \longrightarrow M$をC^r微分同相写像$(r \geqq 1)$とする．fの周期点全体の集合を$Per(f)$，非遊走点全体の集合を$\Omega(f)$とする．これらはf不変で$\Omega(f) \supset Per(f)$となる．そして$\Omega(f)$は閉集合である．

M, NをC^∞多様体，$f: M \longrightarrow M$，$g: N \longrightarrow N$をC^r微分

同相写像 ($r \geqq 1$) とする．いま，同相写像 $h: M \longrightarrow N$ があって，$hf = gh$ が成立するとき，f と g は位相的に共役といい，$f \sim g$ で表わす．

また，同相写像 $h: \Omega(f) \longrightarrow \Omega(g)$ があって，$hf = gh$ が $\Omega(f)$ 上で成立するとき，f と g は Ω上で位相的に共役といい，$f \underset{\Omega}{\sim} g$ で表わす．

M, N をコンパクトな C^∞ 多様体とする．$C^r(M, N)$ を M から N への C^r 写像全体の集合に C^r 位相を入れた空間とする ($r \geqq 1$)．すると，これは Banach 多様体となる．$\mathrm{Diff}^r(M)$ を M から M への C^r 微分同相写像全体の作る $C^r(M, M)$ の部分集合とすると，これは開集合となる．したがって $\mathrm{Diff}^r(M)$ は Baire 空間となる．

C^r 微分同相写像 $f: M \longrightarrow M$ が構造的に安定とは，f の $\mathrm{Diff}^r(M)$ における適当な近傍 $\mathcal{U}$ があって，$\mathcal{U} \ni g$ はすべて f と位相的に共役となるときをいう。また，$f \sim g$ の代りに $f \underset{\Omega}{\sim} g$ が成り立つとき，f は Ω-安定という．

構造的安定性に関する最も基本的なものは，勿論，構造的に安定（または Ω-安定）となるための必要十分条件を求めることである．そして，この問題は，微分可能力学系の理論の発展の中で，最も大きな柱の1つである．そこで，この問題の現在の到達点について述べると共に，これから派

生ずる問題を述べることにする.

C^r 多様体 M の接ベクトル束を $T(M)$ とする. $\Lambda \subset M$ に対して, $T_\Lambda(M)$ をその Λ への制限とする. C^r 微分同相写像 $f: M \to M$ の微分 Tf は $T(M)$ の自己同型を引き起こす. いま, $f(\Lambda)=\Lambda$ とすると Tf は $T_\Lambda(M)$ の自己同型となる.

$\Lambda \subset M$ がコンパクトで $f(\Lambda)=\Lambda$ とする. そして, 次の2つの条件をみたすとき, Λ を f の双曲型集合という.

(1) $T_\Lambda(M)$ は Tf 不変な2つの部分ベクトル束 E^s, E^u の Whitney 和に分解される. 即ち $T_\Lambda(M)=E^s \oplus E^u$

(2) 適当な定数 $c>0$, $0<\lambda<1$ があって, M の適当な Riemannian metric に関して

$$\|Tf^n(v)\| \leqq c\lambda^n \|v\|, \quad v \in E^s$$

$$\|Tf^{-n}(v)\| \leqq c\lambda^n \|v\|, \quad v \in E^u$$

$n=0,1,2,\cdots$ が成立する.

C^r 微分同相写像 $f: M \to M$ に対して, $x \underset{s}{\sim} y$ $(x,y \in M)$ とは $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))=0$ となるときと定義する. (ただし, d は M の metric). この同値類を W^s_x で表わす. 同様に $x \underset{u}{\sim} y$ $(x,y \in M)$ を $\lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y))=0$ で定義し, その同値類を W^u_x で表わす.

<u>定理1</u> (Cf. [4]) Λ が f の双曲型集合なら, $x \in \Lambda$ に対して, W^s_x, W^u_x は E^s_x, E^u_x からの injective C^r immersion の

像である．（E^s_x, E^u_x は E^s, E^u の x 上のファイバー．）

次に $f: M \longrightarrow M$（C^r 微分同相写像）に対して，主要な性質を公理の形で述べる．

Axiom A (a) $\Omega(f)$ は f の双曲型集合である．

(b) $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$

<u>定理 2</u>（cf.［4］）f が Axiom A をみたすとき，$M = \bigcup_{x\in\Omega(f)} W^s_x = \bigcup_{x\in\Omega(f)} W^u_x$．（ただし M はコンパクト．）

次に，$E^s = \{v \in T(M) \mid \lim_{n\to\infty} \| Tf^n(v) \| = 0\}$, $E^u = \{v \in T(M) \mid \lim_{n\to\infty} \| Tf^{-n}(v) \| = 0\}$, $E^s_x = E^s \cap T_x(M)$, $E^u_x = E^u \cap T_x(M)$ とおく，いま $T_x(M) = E^s_x + E^u_x$ が，すべての $x \in M$ に対して成立するとき，f は <u>strong transversality condition</u> をみたすという

<u>定理 3</u>（cf.［0］）$f: M \longrightarrow M$ がコンパクト C^∞ 多様体 M の C^r 微分同相写像で，strong transversality condition をみたすなら，f は構造的に安定である．

この定理によって，構造的に安定となるための十分条件が与えられたわけであるが，これが必要かどうかが問題である．

<u>定理 4</u>（cf.［4］）$f: M \rightarrow M$ が Axiom A をみたす C^r 微分同相写像（$r \geqq 1$），［M はコンパクト］とする．このとき，

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$$

なる $\Omega(f)$ の分割で，次の性質をもつものが存在する．

(1) Ω_iは空でないf不変な閉集合である．そして，Ω_iは，このような空でないf不変な閉集合2つの和に分割できない，$i=1,\cdots,k$

(2) $f|\Omega_i:\Omega_i\to\Omega_i$ $(i=1,\cdots,k)$はdense orbitをもつ．

この定理による$\Omega(f)$の分割$\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$を$\Omega(f)$のスペクトル分解という．

$W^s(\Omega_i)=\bigcup_{x\in\Omega_i}W^s_x$，$W^u(\Omega_i)=\bigcup_{x\in\Omega_i}W^u_x$とおく．そして$W^s(\Omega_i)\cap W^u(\Omega_j)\neq\phi$のとき，$\Omega_i\leqq\Omega_j$と定義する．いま$\leqq$が$\{\Omega_1,\cdots,\Omega_k\}$の順序を生成するとき，すなわち$\leqq$によるcycleが存在しないとき，$f$はno cycle propertyをみたすという．

定理5 MがコンパクトC^∞多様体で，$f:M\to M$がC^r微分同相写像$(r\geqq1)$とする．いまfがAxiom Aとno cycle propertyをみたすなら，fはΩ-安定である．(Cf. [5])．

定理6 上と同じ記号で，fがAxiom Aをみたし，Ω-安定なら，fはno cycle propertyをみたす．(Cf. [8])．

以上から派生する問題として，次のようなものがある．

問題1 (a) 構造的に安定ならAxiom Aをみたすか．

(b) Ω-安定ならAxiom Aをみたすか．

問題2 fがAxiom Aをみたすとき，定理4 (2)の$f|\Omega_i$

を位相的に分類せよ．

可算個の稠密な開集合の共通部分を含む集合を<u>residual</u>という．$\mathrm{Diff}^r(M)$の適当なresidual setに属するfに対して成立するような性質を<u>generic</u>という．

<u>問題3</u>　W^s_x, W^u_x　$(x \in M)$がMのsmooth submanifoldとなるような性質はgenericか．

<u>問題4</u>　Axiom A(a)よりAxiom A(b)が導かれるか．

Pugh[9]のclosing lemmaより，$r=1$のときは，Axiom A(b)がgenericであることが知られている．

<u>問題5</u>　Axiom Aと<u>no cycle property</u>をみたすfに対して，そのスペクトル分解$\{\Omega_1, \cdots, \Omega_k\}$の作る順序集合を特長づけよ．

<u>問題6</u>　Axiom Aをみたすfのhomotopy classを特長づけよ．(Cf. Zeeman [16])．

<u>§2 Anosov 微分同相写像</u>

$f: M \to M$が，コンパクト多様体MのC^r微分同相写像のとき$(r \geq 1)$，Mがfの双曲型集合となれば，fを<u>Anosov微分同相写像</u>という．

<u>問題7</u>　fがAnosovなら$\Omega(f)=M$となるか．

<u>問題8</u>　fがAnosovで$\Omega(f)=M$なら，fはhyperbolic infranilmanifold automorphismと位相的に共役か．

問題9　2つのhomotopicなAnosov微分同相写像は，位相的に共役か．

これらに関して，Newhouse[7]，Franks[3]によれば，codimension 1，すなわち $\dim E^s=1$ または $\dim E^u=1$ なら，上の問題7，8，9は肯定的である．

またManning[6]によれば，infranilmanifold上のAnosov微分同相写像はhyperbolic infranilmanifold automorphismと位相的に共役である．従って今後は，infranilmanifold以外にAnosov微分同相写像が存在するかどうかが問題となる．さらに，次の問題も基本的である．

問題10　Anosov diffeomorphismのhomotopy classを特長づけよ．例えばAnosov $f: M \to M$ に対して，

$f_*: H_1(M;R) \to H_1(M;R)$ はhyperbolicか．すなわち，固有値はすべて絶対値が1にならないか．

これに関してはFranks[2]，Hirsch[4]，Shiraiwa[11]，Manning[5]がある．

§3 Morse Smale Diffeomorphism その他

MをコンパクトC^∞微分多様体，$f: M \to M$ をC^r微分同相写像 $(r \geqq 1)$ とする．これが，次の条件をみたすとき，fはMorse Smaleという．

(1)　$\Omega(f)$は有限集合，したがって $Per(f)=\Omega(f)$．

(2) $\Omega(f)$ は f の双曲型集合

(3) $\Omega(f) \ni {}^\forall x, {}^\forall y$ に対して，W_x^s と W_y^u は transversal に交わる．

Morse Smale の微分同相写像に関して基本的な問題は次のようなものである．

問題11 Morse Smale に関して，Axiom A と no cycle property が成立することが知られているが，(Cf. [3])，これに関して，問題5を考えよ．

問題12 Morse Smale 微分同相写像の homotopy class を特長づけよ．

この問題に関して，Shub [12]，Bowen [1] によれば，$f: M \to M$ が Morse Smale なら，$f_*: H_*(M;R) \to H_*(M;R)$ の固有値は，すべて1のべき根である。

問題13 同相写像 $h: M \to M$ に対して，その topological entropy を entropy h で表わす．いま $h_*: H_*(M;R) \to H_*(M;R)$ の固有値の絶対値の最大を λ とするとき，

$$\text{entropy } h \geqq \log \lambda$$

が成立するか．

この問題については Bowen [1] による部分的な結果がある．すなわち Axiom A をみたし $\dim \Omega = 0$ なら，上は成立する．

さて最後の問題として，

問題14 以上の問題の analogy を flow の場合に考察せよ。

そもそも，微分同相写像の問題は，flowの問題から来たという歴史的事実がある．Smale によれば，微分同相写像の理論から flowの理論への移行は，割り合い簡単とのことである．しかし，Zeeman によれば，その逆の方が容易なこともあるとの事であるから，両方の問題を同時に意識しながら考えた方がよいかも知れない．

参考文献

[1] R. Bowen: Entropy versus Homology for Certain Diffeomorphisms, to appear

[2] J. Franks: Anosov Diffeomorphisms on Tori, Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 117–124.

[3] J. Franks: Anosov Diffeomorphisms, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 61–94.

[4] M. Hirsch: Anosov Maps, Polycyclic Groups and Homology, Topology 10 (1971), 177–184.

[5] A. Manning: Anosov Diffeomorphisms on Nilmanifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 423–426.

[6] A. Manning: There are no New Anosov Diffeomorphisms on

Tori, to appear

[7] S. Newhouse: On Codimension One Anosov Diffeomorphisms, Amer. J. Math. 92 (1970), 761–770.

[8] J. Palis: A note on Ω-Stability, Proc. Symp. Pure Math. 14. Amer. Math. Soc. (1970), 221–222.

[9] C. Pugh: An Improved Closing Lemma and a General Density Theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010–1021

[10] J. Robbin: A Structural Stability Theorem, Ann. of Math. 94 (1971), 447–493

[11] K. Shiraiwa: Some conditions on Anosov Diffeomorphisms, to appear

[12] M. Shub: Morse-Smale Diffeomorphisms are Unipotent on Homology, Salvador Symposium on Dynamical Systems.

[13] S. Smale: Morse Inequalities for a Dynamical System, Bull. Amer. Math. Soc., 66 (1960), 43–49.

[14] S. Smale: Differentiable Dynamical Systems, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 747–817.

[15] S. Smale: The Ω-Stability Theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. (1970), 289–298.

[16] C. Zeeman: to appear